

Exercice 1 : 5 points

1. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x + 5) = +\infty$ (0,75 pt)

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{2^2 + 2 - 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ FI

Factorisons l'expression $x^2 + x - 6$

Première méthode :

Posons $x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-6) = 25$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Donc $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

Deuxième méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 6 & x - 2 \\ -x^2 + 2x & x + 3 \\ \hline 3x - 6 & \\ -3x + 6 & \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Donc $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

Troisième méthode : Tableau d'Horner

	1	1	-6
2		2	6
	1	3	0

Donc $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$ (1 pt)

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{2 + 1}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$

Etudions le signe de $x - 2$

Posons $x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty \quad (0,75 \text{ pt})$$

2. Déterminons la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas qui suivent :

a. $f(x) = \frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - \frac{2}{3}x + 5 \Rightarrow f'(x) = 5x^3 + 6x - \frac{2}{3}$

$$f'(x) = 5x^3 + 6x - \frac{2}{3} \quad (0,75 \text{ pt})$$

b. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 3}$

$$f'(x) = \frac{2x(2x+3) - 2(x^2 - 4)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 + 8}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 8}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 8}{(2x+3)^2} \quad (1 \text{ pt})$$

c. $f(x) = (3x+1)^5$

$$f'(x) = 5 \times 3(3x+1)^4 = 15(3x+1)^4 \Rightarrow f'(x) = 15(3x+1)^4$$

$$f'(x) = 15(3x+1)^4 \quad (0,75 \text{ pt})$$

Exercice 2 : **5 points**

1. On donne le polynôme $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

a. Justifions que : $p(x) = (x+3)(x+2)(x-2)$

$$(x+3)(x+2)(x-2) = (x+3)(x^2 - 4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = p(x)$$

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x-2) \quad (1,5 \text{ pt})$$

b. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $p(x) = 0$

$$p(x) = 0 \Rightarrow (x+3)(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x+3=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ou } x-2=0$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{-3; -2; 2\} \quad (1 \text{ pt})$$

2. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a. $2(\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0 \quad D_v =]0; +\infty[$

$$\text{Posons } \ln x = t$$

$$\text{On aura : } 2t^2 - 3t + 1 = 0 ; a = 2, b = -3, c = 1$$

$$a + b + c = 2 - 3 + 1 = 0, \text{ donc } t_1 = 1 \text{ et } t_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour } t = 1, \text{ on a : } \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on a : $\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$

$$S = \left\{ e^{\frac{1}{2}}; e \right\} \quad (1,5 \text{ pt})$$

b. $e^{3x} - e^{2x} = 0$

Première méthode

$$e^{3x} - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) = 0$$

$$e^{2x}(e^x - 1) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0 \text{ donc } e^x - 1 = 0$$

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 = 0$$

$$S = \{0\} \quad (1 \text{ pt})$$

Deuxième méthode : changement de variable

Problème : **10 points** ✍

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

1. Déterminons les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f

$$D_f =]-\infty; +\infty[\quad (0,5 \text{ pt})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1 \text{ pt})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -(+\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad (1 \text{ pt})$$

2. Calculons $f'(x)$ puis dressons le tableau des variations de f sur D_f

$$f(x) = -x^3 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \quad (1 \text{ pt})$$

Posons $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Tableau des variations de f sur D_f (1,5 pt)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-4	0	$-\infty$

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$f(1) = -1^3 + 3(1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

3. Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f en son point

d'abscisse $x_0 = 0$.

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(0) = -3(0)^2 + 3 = 3 \quad ; \quad f(0) = -0^3 + 3(0) - 2 = -2$$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 3x - 2$$

$$(T): y = 3x - 2 \quad (1 \text{ pt})$$

4. a. Recopions et complétons le tableau ci-dessous : **(2,5 pts)**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-4	-2	0	-4

$$f(-2) = -(-2)^3 + 3(-2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$$

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4$$

$$f(0) = -0^3 + 3(0) - 2 = -2$$

$$f(1) = -1^3 + 3(1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$$

$$f(2) = -2^3 + 3(2) - 2 = -8 + 6 - 2 = -4$$

b. Traçons la courbe (C_f) de f et la tangente (T) dans un repère convenable et avec soin. **(1,5 pt)**

